2009/6/24　金融工学・バイノミナル分布の理解のために

＜個数の処理について＞

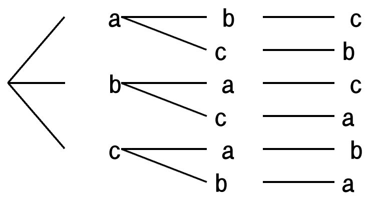
①場合の数とは。

　『ある事柄について，起こりうるすべての場合を数え上げるとき，その総数を**場合の数**という。』求めるとき，あらゆる場合を尽くして考えることが必要。

例　a，b，c の 3 人でリレーのチームを作るとき，3 人の走る順序は，
　アルファベット順に並べて求める。・・・辞書式順序

1	2	3
a	b	c
a	c	b
b	**a**	c
b	c	**a**
c	**a**	b
c	b	**a**

枝分かれをした図を利用する。・・・樹形図



②和の法則

　事柄 A の起こり方が m 通りあり，事柄 B の起こり方が n 通りあると，**A と B が同時に起こらない時，A，B のいずれかが起こる場合の数は，$m + n$ 通り**である。

例　大小 2 個のさいころを同時に投げるとき，目の和が 5 の倍数になる場合の数は？
　目の和は 2，3，4，･･･，10，11，12 だから，

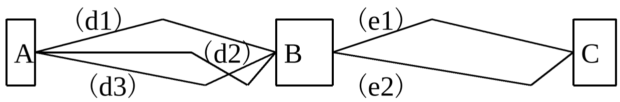
（1）目の和が5					（2）目の和が10			
大	1	2	3	4	大	4	5	6
小	4	3	2	1	小	6	5	4

　(1) で 4 通り，(2) で 3 通り，(1) と (2) は同時に起こらないから，目の和が 5 の倍数になる場合の数は，　$4 + 3 = 7$（通り）

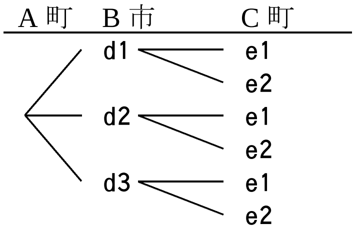
③積の法則

　事柄 A の起こり方が m 通りあり，事柄 B の起こり方が n 通りあると，**A と B が同時に起こる場合の数は，$m \times n$ 通り**である。

例　A 町から B 市の間には 3 本の道路があり，B 市と C 町の間には 2 本の道路がある。A から B を通って C までの行き方の総数は何通りか。



Faculty of Economics
Osaka Gakuin University



A 町から B 市へのどの行き方 d1，d2，d3 を選んでも，B 市から C 町へは e1，e2 の二通りあるから，A 町から C 町までの行き方の場合の数は，3 × 2 = 6（通り）

④順列（Permutation）

４つの数字 a，b，c，d から３個の数字を取り出して１列に並べるとき，その並び方は次のように 24 通りある。（これを　${}_4P_3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$（通り）と求める）

abc	abd	acb	acd	adb	adc	(1)
bac	bad	bca	bcd	bda	bdc	(2)
cab	cad	cba	cbd	cda	cdb	(3)
dab	dac	dba	bbc	dca	dcb	(4)

いくつかのものを順序をつけて並べたものを順列という。
特に，異なる n 個のものから r 個取り出して，１列に並べたものを，***n* 個から *r* 個取り出した順列**と言う。この合計数は，${}_nP_r$ と書きます。４個から３個取り出す順列では，積の法則を利用して簡単に求めることができる。

取り出す順番と個数について，
１番目は，４このうちのどれか，どれでもよい。　　４通り
２番目は，残り３このうちのどれか一つ。　　　　　３通り
３番目は，残り２このうちのどっちか。　　　　　　２通り

１番目△　　２番目□　　３番目○
　　↑　　　　　↑　　　　　↑
４通り　　　　３通り　　　２通り

積の法則から，${}_4P_3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$（通り）

一般に，異なる n 個のものから r 個取り出して１列に並べた総数 ${}_nP_r$ は，同じように考え，

１番目△　　２番目□　　３番目○　・・・　r 番目□
　　↑　　　　　↑　　　　　↑　　　　　　　↑
n 通り　　$n-1$ 通り　　$n-2$ 通り　　　$n-(r-1)$ 通り

したがって，
${}_nP_r = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1)$

例　７個から４個とる順列の総和は，

$_7P_4 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$（通り）

特に，n 個から n 個とる順列の総和 $_nP_n$ は，$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$ となる。また，この１から n までの自然数の積を，n の階乗といい，$n!$と書く。

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$$

階乗を使うと，順列の公式は，次のように変形できる。

$$_nP_r = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)\cdot(n-r)(n-r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-r)(n-r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-r)!},\ 0! = 1$$

⑤組合せ（Combination）

前の例で，４個の文字から個の文字を選ぶ組み合わせは，**文字の順序がどうでもよければ**，

（a , b,　c），（a,　b,　d），（a,　c,　d），（b,　c,　d）

一般に，**異なる n 個のものから異なる r 個取り出して，順序を考慮しないで１組**にしたものを，n 個のものから異なる r 個取る組合せといい，その総数を $_nC_r$ と書く。

上の例では，$_4C_3 = 4$ となる。

解き方・たとえば，一つの組（1）の（a , b,　c）について，３文字並べてできる順列は，

$_3P_3 = 3 \times 2 \times 1 = 3!$通りある。

abc　acb　bac　bca　cab　cba　（1）

これは他のどの組についても同様だから，**順序を考慮しないで１組 $_4C_3$ について，全体で** $_4C_3 \times 3!$通りの順列が得られる。つまり，４個から３個取る順列の総数と一致するので，$_4C_3 \times 3! = {}_4P_3$　ゆえに，組み合わせの総数は重複項目が含まれる順列を，重複個数で割ることにより，次のように求まる。

$$_4C_3 = \frac{_4P_3}{3!} = \frac{4\times 3\times 2}{3\times 2\times 1} = 4$$

一般的な公式

$$_nC_r = \frac{_nP_r}{r!} = \frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)}{r\times(r-1)\times\cdots\times 3\times 2\times 1}$$

$$_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!},\ {}_nC_r = {}_nC_{n-r},\ {}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r,\ {}_nC_n = 1$$

Faculty of Economics
Osaka Gakuin University

例　30 人から 3 人選ぶ組み合わせは,

$$ {}_{30}C_3 = \frac{{}_{30}P_3}{3!} = \frac{30\times 29\times 28}{3\times 2\times 1} = 10\times 29\times 14 = 4060 $$

⑦二項定理

$(u+d)^2, (u+d)^3$ の展開は，次のようになる。

$(u+d)^2 = u^2 + 2ud + d^2$, $(u+d)^3 = u^3 + 3u^2d + 3ud^2 + d^3$

例えば，$(u+d)^5$ の展開は，$(u+d)$ の 5 個の積として，次のように書ける。

$$(u+d)\times(u+d)\times(u+d)\times(u+d)\times(u+d)$$

ところで，この展開式は，5 個の因数の各から u と d のどちらかを取って，掛け合わせた積となっている。5 個の因数のうち，例えば，2 個から u，残り 3 個から d をとって掛け合わせれば，$(\boldsymbol{u}+d)\times(u+\boldsymbol{d})\times(u+\boldsymbol{d})\times(\boldsymbol{u}+d)\times(u+\boldsymbol{d})$，$u^2d^3$ となる。

$(\boldsymbol{u}+d)$
$(u+\boldsymbol{d})$
$(u+\boldsymbol{d})$
$(\boldsymbol{u}+d)$
$(u+\boldsymbol{d})$

この時，積 u^2d^3 が得られる場合の数は，例えば d について上の表を見れば，5 個の中から 3 個を選ぶ方法の総数 ${}_5C_3$ に等しい。

従って，展開式の中の u^2d^3 の項の係数は，${}_5C_3$ となる。

同様に考えれば，d を取ってくるところに着目して，

u^5 の係数は ${}_5C_0$ ，　u^4d の係数は ${}_5C_1$ ，　u^3d^2 の係数は ${}_5C_2$ ，
u^2d^3 の係数は ${}_5C_3$ ，　ud^4 の係数は ${}_5C_4$ ，　d^5 の係数は ${}_5C_5$.

従って，$(u+d)^5$ の展開は

$$(u+d)^5 = {}_5C_0\times u^5 + {}_5C_1\times u^4d + {}_5C_2\times u^3d^2 + {}_5C_3\times u^2d^3 + {}_5C_4\times ud^4 + {}_5C_5\times d^5$$

一般的に，$(u+d)^n$ の展開式における $u^{n-r}d^r$ の係数は，n 個の因数 $(u+d)$ のうち，r 個から d を残りの $(n-r)$ から u を取り出す方法の総数 ${}_nC_r$ に等しい。

二項定理

$$(u+d)^n = {}_nC_0\cdot u^n + {}_nC_1\cdot u^{n-1}d + {}_nC_2\cdot u^{n-2}d^2 + \cdots$$
$$+ {}_nC_r\cdot u^{n-r}d^r + \cdots + {}_nC_{n-1}\cdot ud^{n-1} + {}_nC_n\cdot d^n$$

要約・$(u+d)^n$ の展開式で，$u^{n-r}d^r$ を含む項 ${}_nC_r u^{n-r}d^r$ を $(u+d)^n$ の一般項と言い，
${}_nC_r$ を二項係数とも言う。

Faculty of Economics
Osaka Gakuin University

例

$$(u+d)^6 = {}_6C_0u^6 + {}_6C_1u^5d + {}_6C_2u^4d^2 + {}_6C_3u^3d^3 + {}_6C_4u^2d^4 + {}_6C_5ud^5 + {}_6C_6d^6$$
$$= u^6 + 6\cdot u^5d + 15\cdot u^4d^2 + 20\cdot u^3d^3 + 15\cdot u^2d^4 + 6\cdot ud^5 + d^6$$

$$(2u+d)^4 = {}_4C_0(2u)^4 + {}_4C_1(2u)^3d + {}_4C_2(2u)^2d^2 + {}_4C_3(2u)d^3 + {}_4C_4d^4$$
$$= 16u^4 + 32u^3d + 24u^2d^2 + 8ud^3 + d^4$$

$(3u^2-2d)^5$,　 $A\times u^4d^3$, $A\cdots$

$${}_5C_r(3u^2)^{5-r}(-2d)^r = {}_5C_r\cdot 3^{5-r}\cdot(u^2)^{5-r}\cdot(-2)^r\cdot d^r = {}_5C_r\cdot 3^{5-r}\cdot(-2)^r\cdot u^{10-2r}\cdot d^r$$

$$u^{10-2r}\cdot d^r \to u^4d^3 \to r=3$$

$${}_5C_r\cdot 3^{5-r} \to r=3 \to {}_5C_3\cdot 3^{5-3} = -720$$

Faculty of Economics
Osaka Gakuin University