＜個数の処理について＞

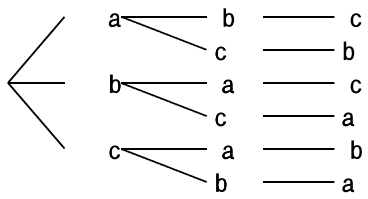
①場合の数とは。

『ある事柄について，起こりうるすべての場合を数え上げるとき，その総数を**場合の数**という。』求めるとき，あらゆる場合を尽くして考えることが必要。

例　a，b，c の 3 人でリレーのチームを作るとき，3 人の走る順序は，
アルファベット順に並べて求める。・・・辞書式順序

1	2	3
a	b	c
a	c	b
b	**a**	c
b	c	**a**
c	**a**	b
c	b	**a**

枝分かれをした図を利用する。・・・樹形図



②和の法則

事柄 A の起こり方が m 通りあり，事柄 B の起こり方が n 通りあると，**A と B が同時に起こらない時，A，B のいずれかが起こる場合の数は，$m + n$ 通り**である。

例　大小 2 個のさいころを同時に投げるとき，目の和が 5 の倍数になる場合の数は？
目の和は 2，3，4，･･･，10，11，12 だから，

（1）目の和が5

大	1	2	3	4
小	4	3	2	1

（2）目の和が10

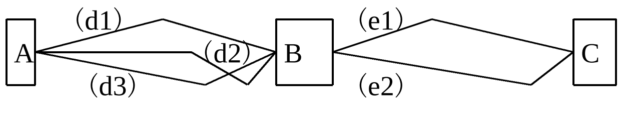
大	4	5	6
小	6	5	4

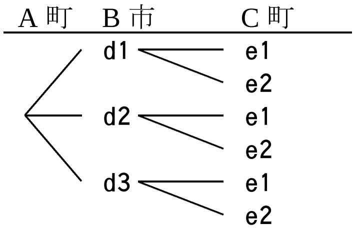
(1) で 4 通り，(2) で 3 通り，(1) と (2) は同時に起こらないから，目の和が 5 の倍数になる場合の数は，　$4 + 3 = 7$（通り）

③積の法則

事柄 A の起こり方が m 通りあり，事柄 B の起こり方が n 通りあると，**A と B が同時に起こる場合の数は，$m \times n$ 通り**である。

例　A 町から B 市の間には 3 本の道路があり，B 市と C 町の間には 2 本の道路がある。A から B を通って C までの行き方の総数は何通りか。





A 町から B 市へのどの行き方 d1，d2，d3 を選んでも，B 市から C 町へは e1，e2 の二通りあるから，A 町から C 町までの行き方の場合の数は，$3 \times 2 = 6$（通り）

④順列（Permutation）

４つの数字 a，b，c，d から３個の数字を取り出して１列に並べるとき，その並び方は次のように 24 通りある。（これを $_4P_3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$（通り）と求める）

abc	abd	acb	acd	adb	adc	(1)
bac	bad	bca	bcd	bda	bdc	(2)
cab	cad	cba	cbd	cda	cdb	(3)
dab	dac	dba	bbc	dca	dcb	(4)

いくつかのものを順序をつけて並べたものを順列という。
特に，異なる n 個のものから r 個取り出して，１列に並べたものを，**n 個から r 個取り出した順列**と言う。この合計数は，$_nP_r$ と書きます。４個から３個取り出す順列では，積の法則を利用して簡単に求めることができる。

取り出す順番と個数について，
１番目は，４このうちのどれか，どれでもよい。　　４通り
２番目は，残り３このうちのどれか一つ。　　３通り
３番目は，残り２このうちのどっちか。　　２通り

１番目△	２番目□	３番目〇
↑	↑	↑
４通り	３通り	２通り

積の法則から，$_4P_3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$（通り）

一般に，異なる n 個のものから r 個取り出して１列に並べた総数 $_nP_r$ は，同じように考え，

１番目△	２番目□	３番目〇	・・・	r 番目□
↑	↑	↑		↑
n 通り	$n-1$ 通り	$n-2$ 通り		$n-(r-1)$ 通り

したがって，

$$_nP_r = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1)$$

Faculty of Economics　Osaka Gakuin University

例　7個から4個とる順列の総和は，

$_{7}P_{4} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$（通り）

特に，n個からn個とる順列の総和 $_{n}P_{n}$ は，$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$ となる。また，この1から n までの自然数の積を，n の階乗といい，$n!$ と書く。

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$$

階乗を使うと，順列の公式は，次のように変形できる。

$$_{n}P_{r} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)\cdot(n-r)(n-r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-r)(n-r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-r)!},\ 0! = 1$$

⑤組合せ（Combination）

前の例で，4個の文字から個の文字を選ぶ組み合わせは，**文字の順序がどうでもよければ，**

（a , b,　c），（a,　b,　d），（a,　c,　d），（b,　c,　d）

一般に，**異なる *n* 個のものから異なる *r* 個取り出して，順序を考慮しないで1組**にしたものを，n 個のものから異なる r 個取る組合せといい，その総数を $_{n}C_{r}$ と書く。

上の例では，$_{4}C_{3} = 4$ となる。

解き方・たとえば，一つの組(1)の(a , b,　c)について，３文字並べてできる順列は，

$_{3}P_{3} = 3 \times 2 \times 1 = 3!$ 通りある。

abc　acb　bac　bca　cab　cba　(1)

これは他のどの組についても同様だから，**順序を考慮しないで1組 $_{4}C_{3}$ について，全体で** $_{4}C_{3} \times 3!$ 通りの順列が得られる。つまり，4個から3個取る順列の総数と一致するので，$_{4}C_{3} \times 3! = {}_{4}P_{3}$　ゆえに，組み合わせの総数は重複項目が含まれる順列を，重複個数で割ることにより，次のように求まる。

$$_{4}C_{3} = \frac{_{4}P_{3}}{3!} = \frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2 \times 1} = 4$$

一般的な公式

$$_{n}C_{r} = \frac{_{n}P_{r}}{r!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1)}{r \times (r-1) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$_{n}C_{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!},\ {}_{n}C_{r} = {}_{n}C_{n-r},\ {}_{n}C_{r} = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_{r},\ {}_{n}C_{n} = 1$$

Faculty of Economics　Osaka Gakuin University

例　30 人から 3 人選ぶ組み合わせは，

$$_{30}C_3 = \frac{_{30}P_3}{3!} = \frac{30\times 29\times 28}{3\times 2\times 1} = 10\times 29\times 14 = 4060$$

************** 以下はおまけです***

⑦二項定理

$(u + d)^2, (u + d)^3$ の展開は，次のようになる。

$(u+d)^2 = u^2 + 2ud + d^2$, $(u+d)^3 = u^3 + 3u^2d + 3ud^2 + d^3$

例えば，$(u + d)^5$ の展開は，$(u + d)$ の 5 個の積として，次のように書ける。

$$(u + d)\times(u + d)\times(u + d)\times(u + d)\times(u + d)$$

ところで，この展開式は，5 個の因数の各から u と d のどちらかを取って，掛け合わせた積となっている。5 個の因数のうち，例えば，2 個から u，残り 3 個から d をとって掛け合わせれば，$(\boldsymbol{u} + d)\times(u + \boldsymbol{d})\times(u + \boldsymbol{d})\times(\boldsymbol{u} + d)\times(u + \boldsymbol{d})$，$u^2d^3$ となる。

$(\boldsymbol{u} + d)$
$(u + \boldsymbol{d})$
$(u + \boldsymbol{d})$
$(\boldsymbol{u} + d)$
$(u + \boldsymbol{d})$

この時，積 u^2d^3 が得られる場合の数は，例えば d について上の表を見れば，5 個の中から 3 個を選ぶ方法の総数 $_5C_3$ に等しい。

従って，展開式の中の $\boldsymbol{u^2d^3}$ の項の係数は，$_5\mathbf{C}_3$ となる。

同様に考えれば，$\boldsymbol{d}$ を取ってくるところに着目して，

u^5 の係数は $_5\mathbf{C}_0$，　u^4d の係数は $_5\mathbf{C}_1$，　u^3d^2 の係数は $_5\mathbf{C}_2$，

u^2d^3 の係数は $_5\mathbf{C}_3$，　ud^4 の係数は $_5\mathbf{C}_4$，　d^5 の係数は $_5\mathbf{C}_5$.

従って，$(u + d)^5$ の展開は

$$(u + d)^5 = {_5\mathbf{C}_0}\times u^5 + {_5\mathbf{C}_1}\times u^4d + {_5\mathbf{C}_2}\times u^3d^2 + {_5\mathbf{C}_3}\times u^2d^3 + {_5\mathbf{C}_4}\times ud^4 + {_5\mathbf{C}_5}\times d^5$$

一般的に，$(u + d)^n$ の展開式における $u^{n-r}d^r$ の係数は，n 個の因数 $(u + d)$ のうち，r 個から d を残りの $(n - r)$ から u を取り出す方法の総数 $_nC_r$ に等しい。

二項定理

$$(u+d)^n = {_nC_0}\cdot u^n + {_nC_1}\cdot u^{n-1}d + {_nC_2}\cdot u^{n-2}d^2 + \cdots$$
$$+ {_nC_r}\cdot u^{n-r}d^r + \cdots + {_nC_{n-1}}\cdot ud^{n-1} + {_nC_n}\cdot d^n$$

要約・$(u + d)^n$ の展開式で，$u^{n-r}d^r$ を含む項 $_nC_r u^{n-r}d^r$ を $(u + d)^n$ の一般項と言い，
$_nC_r$ を二項係数とも言う。

Faculty of Economics　Osaka Gakuin University

例

$$(u+d)^6 = {}_6C_0u^6 + {}_6C_1u^5d + {}_6C_2u^4d^2 + {}_6C_3u^3d^3 + {}_6C_4u^2d^4 + {}_6C_5ud^5 + {}_6C_6d^6$$

$$= u^6 + 6\cdot u^5d + 15\cdot u^4d^2 + 20\cdot u^3d^3 + 15\cdot u^2d^4 + 6\cdot ud^5 + d^6$$

$$(2u+d)^4 = {}_4C_0(2u)^4 + {}_4C_1(2u)^3d + {}_4C_2(2u)^2d^2 + {}_4C_3(2u)d^3 + {}_4C_4d^4$$

$$= 16u^4 + 32u^3d + 24u^2d^2 + 8ud^3 + d^4$$

$(3u^2-2d)^5$,　$A\times u^4d^3$, $A\cdots$

$${}_5C_r(3u^2)^{5-r}(-2d)^r = {}_5C_r\cdot 3^{5-r}\cdot(u^2)^{5-r}\cdot(-2)^r\cdot d^r = {}_5C_r\cdot 3^{5-r}\cdot(-2)^r\cdot u^{10-2r}\cdot d^r$$

$$u^{10-2r}\cdot d^r \to u^4d^3 \to r=3$$

$${}_5C_r\cdot 3^{5-r} \to r=3 \to {}_5C_3\cdot 3^{5-3} = -720$$

Faculty of Economics　Osaka Gakuin University